Jeudi 15 janvier 2014

Corrigé *détaillé* de l'examen

Exercice 1.

1. Il y a trois choses à vérifier.

• Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ telle que $\|u\|_\infty = 0$. Cela signifie $\sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k| = 0$. Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|u_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k|$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|u_k| \leqslant 0$. Comme la valeur absolue d'un nombre réel est positive ou nulle on a en fait $0 \leqslant |u_k| \leqslant 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Cela implique que $|u_k| = 0$, donc que $u_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Autrement dit $u = 0$.

• Soit $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition de la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de l^∞ on a $\lambda u = (\lambda u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Si $\lambda = 0$ on a donc $\|\lambda u\|_\infty = 0 = |\lambda|\|u\|_\infty$. Supposons maintenant que $\lambda \neq 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|\lambda u_k| = |\lambda||u_k|$. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|u_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k|$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a (comme $|\lambda|$ est positif)

$$|\lambda u_k| = |\lambda||u_k| \leqslant |\lambda|\sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k|.$$

Le terme de droite de cette inégalité est une constante indépendante de k. En passant au sup dans l'inégalité on obtient donc

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|\lambda u_k| \leqslant |\lambda|\sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k|. \tag{0.1}$$

Cette inégalité est vraie pour tout $u \in \ell^\infty$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Appliquons-la à la suite λu et au scalaire $\frac{1}{\lambda}$. On obtient

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\sup_{k\in\mathbb{N}}|\lambda u_k|,$$

ce qui équivaut à

$$|\lambda|\sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|\lambda u_k|. \tag{0.2}$$

Les inégalités (1) et (2) impliquent

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|\lambda u_k| = |\lambda|\sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k|.$$

On a démontré que pout tout $u \in \ell^\infty$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|\lambda u\|_\infty = |\lambda|\|u\|_\infty$.

• Soit $u = u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}, v = (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$. D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|u_k + v_k| \leqslant |u_k| + |v_k|$. Or pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|u_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k|$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|u_k + v_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}(|u_k|) + |v_k|$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|v_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|v_k|$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|u_k + v_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}}|v_k|.$$

Le terme de droite de cette inégalité est une constante indépendante de k. En passant au sup dans l'inégalité on obtient donc

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k + v_k| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k| + \sup_{k\in\mathbb{N}}|v_k|.$$

On a démontré que pour tout $u, v \in \ell^\infty$ on a

$$\|u + v\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty + \|v\|_\infty.$$

Les trois point ci-dessus signifient que l'application $u \longmapsto \|u\|_\infty$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel ℓ^∞.

2. (a) Montrons pour commencer que pour tout $u \in \ell^\infty$ on a $S(u) \in \ell^\infty$. Soit $u \in \ell^\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $|S(u)_k| = |u_{k+1}| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k|$. Le terme de droite de cette inégalité est une constante indépendante de k. Cela montre que la suite $|S(u)_k|$ est bornée. Autrement dit $S(u) \in \ell^\infty$.

Soit $u, v \in \ell^\infty$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Par définition de la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de ℓ^∞ on a $\lambda u + \mu v = (\lambda u_k + \mu v_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Par définition de S, la suite $S(\lambda u + \mu v)$ est la suite dont le k-ième terme est le $(k+1)$-ième terme de la suite $\lambda u + \mu v$, qui n'est autre que $\lambda u_{k+1} + \mu v_{k+1}$, et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$. En notation mathématique, cela signifie que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$S(\lambda u + \mu v)_k = \lambda u_{k+1} + \mu v_{k+1}.$$

Or, $u_{k+1} = S(u)_k$ et $v_{k+1} = S(v)_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$S(\lambda u + \mu v)_k = \lambda S(u)_k + \mu S(v)_k.$$

Donc $S(\lambda u + \mu v) = \lambda S(u) + \mu S(v)$. On a démontré que S est un endomrophisme $\mathbb{R}$-linéaire de ℓ^∞.

(b) D'après le cours, l'endomorphisme S est continu si et seulement si il existe un réel M tel que pour tout $u \in \ell^\infty$ on ait

$$\|S(u)\|_\infty \leqslant M\|u\|_\infty.$$

Soit $u \in \ell^\infty$. D'après le point 2. (a) ci-dessus on a

$$|S(u)_k| = |u_{k+1}| \leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}}|u_k| = \|u\|_\infty$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En passant au sup sur k dans cette inégalité on obtient

$$\|S(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty.$$

On prend $M = 1$ et S est continu.

(c) Notons $\|S\|_{\mathscr{L}_c}$ la norme de l'endomorphisme continu S relativement à $\|.\|_\infty$. Rappelons que

$$\|S\|_{\mathscr{L}_c} = \sup_{u\neq 0}\frac{\|S(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty}.$$

Le fait que cette définition ait un sens a été démontré dans le cours. D'après le point (b) ci-dessus, pour tout $u \in \ell^\infty$ on a $\|S(u)\|_\infty \leqslant \|u\|_\infty$. Donc pour tout $u \in \ell^\infty$ non-nul on a $\frac{\|S(u)\|_\infty}{\|u\|_\infty} \leqslant 1$. On en déduit que $\|S\|_{\mathscr{L}_c} \leqslant 1$ par passage au sup sur u. Soit $\underline{1} \in \ell^\infty$ la suite constante égale à 1. On a $\|S(\underline{1})\|_\infty = \|\underline{1}\|_\infty = 1$, donc $\frac{\|S(\underline{1})\|_\infty}{\|\underline{1}\|_\infty} = 1$. Donc le sup entrant dans la définition de $\|S\|_{\mathscr{L}_c}$ est atteint et vaut 1.

Exercice 2.

1. Pour $n = 1$ la matrice $A \in \mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ est simplement un nombre réel, noté $a \in \mathbb{R}$, de même que les vecteurs b et c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Toute fonction polynômiale est dérivable et sa dérivée est polynômiale. Donc toute fonction polynômiale est $\mathscr{C}^\infty$. En particulier f l'est. D'après un théorème du cours, f est convexe, respectivement strictement convexe, si et seulement si la matrice Hessienne de f est positive, respectivement définie positive, en tout point $x \in \mathbb{R}$. La matrice hessienne de f en x n'est autre que que sa dérivée seconde $f''(x) = 2a$. Donc la fonction f est convexe, respectivement strictement convexe, si et seulement si $a \geqslant 0$, respectivement $a > 0$.

2. Pour $n = 2$, la matrice A s'écrit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, et le vecteur b s'écrit $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Si l'on note x le vecteur $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, le calcul donne

$$f(x) = a_{1,1}x_1^2 + (a_{1,2} + a_{2,1})x_1x_2 + a_{2,2}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c,$$

si bien que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 2a_{1,1}x_1 + (a_{1,2} + a_{2,1})x_2 + b_1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = 2a_{2,2}x_2 + (a_{1,2} + a_{2,1})x_1 + b_2.$$

Le gradient de f au point x est donc le vecteur

$$\nabla f(x) = \left(\begin{array}{c} 2a_{1,1}x_1 + (a_{1,2} + a_{2,1})x_2 + b_1 \\ 2a_{2,2}x_2 + (a_{1,2} + a_{2,1})x_1 + b_2 \end{array} \right).$$

Les dérivées secondes sont données par

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) = 2a_{1,1}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x) = 2a_{2,2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x) = a_{1,2} + a_{2,1}.$$

Donc la hessienne de f au point x est la matrice

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2a_{1,1} & a_{1,2} + a_{2,1} \\ a_{1,2} + a_{2,1} & 2a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Il se trouve qu'elle est indépendante de x. D'après le cours, la fonction f est convexe, respectivement strictement convexe, si et seulement si la matrice symétrique $Hf(x)$ est positive, respectivement définie positive, pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Ici, la fonction f est donc convexe, respectivement strictement convexe, si et seulement si la matrice

$$H := \begin{pmatrix} 2a_{1,1} & a_{1,2} + a_{2,1} \\ a_{1,2} + a_{2,1} & 2a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

est positive, respectivement définie positive.

Notons qu'ici on peut déterminer les valeurs propres de H (revoir le cours d'algèbre linéaire des années précédentes). Le polynôme caractéristique de H est le polynôme

$$4X^2 - 4(a_{1,1} + a_{2,2})X + a_{1,1}a_{2,2} - (a_{1,2} + a_{2,1})^2.$$

Les valeurs propres de H sont les racines de ce polynôme, à savoir les nombres réels

$$r_\pm = \frac{-(a_{1,1} + a_{2,2}) \pm \sqrt{a_{1,1}^2 + a_{1,1}a_{2,2} + a_{2,2}^2 + (a_{1,2} + a_{2,1})^2}}{2}.$$

Donc f est convexe, respectivement strictement convexe, si et seulement si $r_\pm \geqslant 0$, respectivement $r_\pm > 0$.

3. On a

$$\begin{array}{rcl} f(x+h) & = & {}^t(x+h)A(x+h) +^t b(x+h) + c \\ & = & ({}^t x +^t h)A(x+h) +^t bx +^t bh + c \\ & = & ({}^t x +^t h)Ax + ({}^t x +^t h)Ah +^t bx +^t bh + c \\ & = & {}^t xAx +^t xAh +^t hAx +^t hAh +^t bx +^t bh + c. \end{array}$$

Donc

$$f(x+h) - f(x) =^t xAh +^t hAx +^t bh +^t hAh.$$

Fixons x. La fonction $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h \longmapsto^t xAh +^t hAx +^t bh$ est $\mathbb{R}$-linéaire. D'après Cauchy-Schwarz on a

$${}^t hAh = \langle Ah, h \rangle \leqslant \|Ah\| \|h\|,$$

où $\|.\|$ désigne la norme de $\mathbb{R}^n$ définie par $\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}}$. Comme la fonction $h \longmapsto \|Ah\|$ tend vers 0 quand h tend vers 0, la fonction $h \longmapsto \epsilon(h) = \frac{{}^t hAh}{\|h\|}$ aussi. En résumé on a

$$f(x+h) - f(x) = ({}^t xAh +^t hAx +^t bh) + \|h\|\epsilon(h)$$

où $h \longmapsto^t xAh +^t hAx +^t bh$ est $\mathbb{R}$-linéaire et ϵ tend vers 0 en 0. Cela signifie que f est différentiable en x et que

$$df(x)(h) =^t xAh +^t hAx +^t bh.$$

On remarque que ${}^t hAx$ est un scalaire, de sorte que ${}^t hAx = {}^t({}^t hAx) = {}^t x {}^t Ah$, et on peut donc réécrire

$$df(x)(h) = {}^t xAh + {}^t x {}^t Ah + {}^t bh = ({}^t xA + {}^t x {}^t A + {}^t b)h = {}^t({}^t Ax + Ax + b)h = \langle Ax + {}^t Ax + b, h \rangle.$$

On a donc directement $\nabla f(x) = (A + {}^t A)x + b$.

4. Pour simplifier la notation, on pose $H := (A + {}^t A) \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, de sorte que $\nabla f(x) = Hx + b$. La i-ème ligne de cette égalité entre vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} H_{ij} x_j + b_i.$$

On a donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = H_{ij},$$

c'est à dire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$Hf(x) = H = A + {}^t A,$$

où ${}^t A$ est la transposée de A. En particulier, la matrice $Hf(x)$ ne dépend pas de x donc est continue par rapport à x, et f est de classe $\mathscr{C}^2$. Remarquer que l'on retrouve le résultat démontré en 2. si on prend $n = 2$.

5. D'après le résultat du cours déjà cité, la fonction f est convexe, respectivement strictement convexe, si et seulement si la matrice symétrique $A + {}^t A$ est positive, respectivement définie positive.

6. Supposons f strictement convexe. D'après un théorème du cours, pour montrer que f admet un unique minimum, il suffit de montrer que f admet un unique point critique. Comme on l'a vu en 3., on a $\nabla f(x) = Hx + b$ et notre hypothèse est que la matrice symétrique $H = A + {}^t A$ est définie positive. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de H. Notre hypothèse est que tous les λ_i sont strictement positifs. Or, le déterminant de H est le produit des λ_i, donc est non-nul. Autrement dit, la matrice H est inversible. Par conséquent, il existe un (unique) vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x) = 0$, c'est à dire $Hx = -b$, à savoir le vecteur $x = H^{-1}(-b)$. Un tel vecteur est un point critique de f. On en déduit que f a un unique minimum strict sur $\mathbb{R}^n$ en $x = H^{-1}(-b)$.

7. D'après les calculs faits en 2., on a dans ce cas

$$\nabla f(x) = (2x_1 + b_1, b_2)$$

pour tout $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, si $b_2 \neq 0$, la fonction f n'a pas de point critique, donc pas de minimum. Examinons le cas $b_2 = 0$. Dans ce cas notre fonction devient

$$f(x) = x_1^2 + b_1 x_1 + c.$$

Elle ne dépend que de la variable x_1. Son unique minimum est atteint en $x_1 = -\frac{b_1}{2}$ (exercice que le lecteur doit savoir faire depuis longtemps). Les $(-\frac{b_1}{2}, x_2)$ sont les minima de f pour tout $x_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 3.

1. Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ on a $\beta_j \leqslant 0$. Alors pour tout n-uplet $(x_j) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ la somme $\sum_j \beta_j x_j$ est négative ou nulle donc ne peut pas être égale à γ. Autrement dit $\mathscr{E}_{\beta,\gamma} = \emptyset$.

2. Supposons qu'il existe un indice j_0 tel que $\beta_{j_0} > 0$ et un indice j_1 tel que $\beta_{j_1} \leqslant 0$ (Remarquer que cette hypothèse implique que $n \geqslant 2$).

Pour $j \neq j_0$, $j \neq j_1$, on pose $x_j = \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ qu'on fixera ultérieurement, $x_{j_1} = k \in \mathbb{N}$ et

$$x_{j_0} = \frac{1}{\beta_{j_0}} \left(\gamma - k\beta_{j_1} + \epsilon \sum_{j \neq j_0, j \neq j_1} \beta_j \right), \text{ de sorte que } \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j = \gamma,$$

indépendamment du choix de k et ϵ. Fixons tout d'abord $\epsilon > 0$ suffisamment petit, de sorte que

$$\gamma - \epsilon \sum_{j \neq j_0, j \neq j_1} \beta_j > 0.$$

Maintenant, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$x_{j_0} = \frac{1}{\beta_{j_0}} \left(\gamma - \beta_{j_1} k - \epsilon \sum_{j \neq j_0, j \neq j_1} \beta_j \right) \geqslant \frac{1}{\beta_{j_0}} \left(\gamma - \epsilon \sum_{j \neq j_0, j \neq j_1} \beta_j \right) > 0,$$

car par hypothèse $\beta_{j_1} \leqslant 0$. On en déduit donc que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le point x défini par les coordonnées ci-dessus $x = (x_j)$ appartient à $\mathscr{E}_{\beta,\gamma}$. Ce dernier est donc non vide. De plus $x_{j_1} \to \infty$ lorsque $k \to \infty$ donc $\mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ n'est pas borné. Enfin, si on appelle x^k la suite de points ainsi définie, on a $f_\alpha(x^k) \to_{k \to +\infty} +\infty$ comme produit de termes dont l'un, $x_{j_1}^{\alpha_1}$ tend vers l'infini, et les autres sont bornés inférieurement par des constantes positives indépendantes de k.

Remarque : pour montrer que $\mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ n'est ni vide ni borné, il suffit en fait de prendre $\epsilon = 0$ dans ce qui précède, ce qui simplifie la preuve. Il faut prendre $\epsilon > 0$ pour montrer que f_α n'est pas bornée.

3. Sous l'hypothèse que $\beta_j > 0$ pour tout j, pour tout $x = (x_j) \in \mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ on a (on utilise le fait que $\beta_j > 0$ pour tout j)

$$\|x\|_\infty = \sup_j |x_j| = \sup_j x_j \leqslant \frac{1}{\min_{i \in \mathbb{N}_n^*}(\beta_i)} \sum_j \beta_j x_j = \frac{1}{\min_{i \in \mathbb{N}_n^*}(\beta_i)} \gamma$$

si bien que $\mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ est borné. Par ailleurs $\mathscr{E}_{\beta,\gamma} = A \cap B$ avec $A = \mathbb{R}_+^n$ qui est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et B est l'image inverse du fermé $\{\gamma\} \subset \mathbb{R}$ par l'application continue (car linéaire) $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g_{\beta,\gamma} : x = (x_j) \longmapsto \sum_j \beta_j x_j.$$

Comme intersection de deux fermés, $\mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ est un fermé, et donc un compact de $\mathbb{R}^n$. Comme la fonction f_α est continue sur le compact $\mathscr{E}_{\beta,\gamma}$, elle y admet un maximum d'après un théorème du cours.

4. Remarquons que pour tout $x = (x_j) \in \mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ on a $x_j \geqslant 0$ pour tout j et donc $f_\alpha(x) \geqslant 0$. Supposons par l'absurde que $f_\alpha(a) \leqslant 0$. D'après la remarque précédente, on a $f_\alpha(a) = 0$. Par définition de a on a

$$0 \leqslant f_\alpha(x) \leqslant f_\alpha(a) = 0$$

pour tout $x \in \mathscr{E}_{\beta,\gamma}$, donc f_α est nulle sur $\mathscr{E}_{\beta,\gamma}$. Vu la définition de f_α, cela implique que pour tout $x = (x_j) \in \mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ il existe un indice j_0 tel que $x_{j_0} = 0$. C'est absurde. En effet le n-uplet $(\frac{\gamma}{n\beta_j})$ appartient à $\mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ et $\frac{\gamma}{n\beta_j}$ est non-nul pour tout j. Par conséquent $f_\alpha(a) > 0$. Cela implique que $a_j > 0$ pour tout j, ce qui signifie que $a \in \mathscr{F}_{\beta,\gamma}$.

5. Notons $g_{\beta,\gamma} : \mathbb{R}_+^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g_{\beta,\gamma}(x) = \sum_j \beta_j x_j - \gamma$. Observer que $g_{\beta,\gamma}$ est différentiable et que $\mathscr{E}_{\beta,\gamma} = g_{\beta,\gamma}^{-1}(0)$. Comme f_α est différentiable, d'aprés un théorème du cours il existe un réel λ tel que pour tout j on ait

$$\lambda \frac{\partial g_{\beta,\gamma}}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j}(a)$$

ce qui se réécrit

$$\lambda \beta_j = \alpha_j \frac{f_\alpha(a)}{a_j}$$

après calcul des dérivées partielles. On en déduit l'égalité demandée en multipliant par a_j.

6. Sommons les n égalités obtenues dans la question précédente. On obtient

$$\lambda \sum_j \beta_j a_j = f_\alpha(a) \sum_j \alpha_j.$$

Comme $a \in \mathscr{E}_{\beta,\gamma}$ on a $\sum_j \beta_j a_j = \gamma$. Donc l'égalité ci-dessus équivaut à

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} f_\alpha(a) \left(\sum_j \alpha_j \right).$$

Reportons cette expression dans les identités obtenues en 5. On en déduit

$$\frac{1}{\gamma} f_\alpha(a) \left(\sum_i \alpha_i \right) \beta_j a_j = \alpha_j f_\alpha(a)$$

pour tout j ce qui équivaut à

$$a_j = \frac{\gamma}{(\sum_i \alpha_i)} \frac{\alpha_j}{\beta_j}.$$

pour tout j. Finalement, on obtient $\max_{\mathscr{E}_{\beta,\gamma}} f_\alpha = f_\alpha(a) = \Pi_{j=1}^n a_j^{\alpha_j} = \left(\frac{\gamma}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \right)^{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \Pi_{j=1}^n \left(\frac{\alpha_j}{\beta_j} \right)^{\alpha_j}$.

Exercice 4.

1. On a $\psi(a) = a - (d\phi(a))^{-1}(\phi(a))$. Or $\phi(a) = 0$ par hypothèse et $(d\phi(a))^{-1}$ est une application linéaire donc $(d\phi(a))^{-1}(0) = 0$, d'où $\psi(a) = a$ et a est un point fixe de ψ. L'application $x \longmapsto (d\phi(a))^{-1}(x)$ est linéaire, donc différentiable. L'application $x \longmapsto (d\phi(a))^{-1}(\phi(x))$ est donc une composée d'applications différentiables donc l'est aussi. Donc ψ est différentiable. Calculons la différentielle de ψ : D'après un théorème du cours on a

$$d(f \circ g)(x)(h) = df(g(x))[dg(x)(h)]$$

pour toutes applications composables et différentiables f et g. Comme $x \longmapsto (d\phi(a))^{-1}(x)$ est linéaire, elle coïncide avec sa différentielle en tout point. On en déduit que

$$d\psi(x)(h) = h - (d\phi(a))^{-1}(d\phi(x)(h))$$

pour tous $x, h \in \mathbb{R}^n$. Pour $x = a$ cela donne

$$d\psi(a)(h) = h - (d\phi(a))^{-1}(d\phi(a)(h)) = h - h = 0$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

2. Rappelons qu'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit stable par ψ si pour tout $x \in E$ on a $\psi(x) \in E$. Ceci étant dit, comme ψ est de classe : $\mathscr{C}^1$ et que $d\psi(a) = 0$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}(a, r)$ on ait $\|d\psi(x)\|_{\mathscr{L}} \leqslant \frac{1}{2}$. D'après l'inégalité des accroissements finis on a

$$\|\psi(u) - \psi(v)\| \leqslant \frac{1}{2} \|u - v\|$$

pour tous $u, v \in \overline{B}(a, r)$. Cela implique directement que $\overline{B}(a, r)$ est stable par ψ et que ψ est contractante sur $\overline{B}(a, r)$.

3. C'est le théorème de point fixe de Picard du cours : ne pas oublier de mentionner que $\overline{B}(a, r)$ est complet car fermé dans un complet ($\mathbb{R}^n$).

4. Il suffit de voir que $\varphi(0,0) = 0$ et de calculer la matrice de $d\phi(0)$ et montrer qu'elle est inversible.

5. Laissé au lecteur.